Динамические системы обеспечивают математическую основу для описания окружающего нас мира, моделируя богатые взаимодействия между величинами, которые совместно развиваются во времени. Формально динамические системы касаются анализа, прогнозирования и понимания поведения систем дифференциальных уравнений или итерационных отображений, которые описывают эволюцию состояния системы. Эта формулировка достаточно общая, чтобы охватить ошеломляющий спектр явлений, в том числе наблюдаемых в классических механических системах, электрических цепях, турбулентных жидкости, наука о климате, финансы, экология, социальные системы, неврология, эпидемиология и почти все другие системы, которые развиваются во времени. Современные динамические системы начались с основополагающей работы Пуанкаре о хаотическом движении планет. Она уходит корнями в классическую механику и может рассматриваться как кульминация сотен лет математического моделирования, начиная с Ньютона и Лейбница. Полная история динамических систем слишком богата для этих нескольких страниц, она привлекала интерес и внимание величайших умов на протяжении веков и применялась к бесчисленным области и сложные проблемы. Динамические системы представляют собой одну из наиболее полных и хорошо связанных областей математики, объединяющую различные темы от линейной алгебры и дифференциальных уравнений до топологии, численного анализа и геометрии. Динамические системы стали центральными в моделировании и анализе систем почти во всех областях инженерных, физических и биологических наук. Современные динамические системы в настоящее время переживают ренессанс, когда аналитические выводы и модели первых принципов уступают место подходам, основанным на данных. Слияние большие данные и машинное обучение приводят к изменению парадигмы в анализе и понимании динамических систем в науке и технике. Данных предостаточно, в то время как физические законы или управляющие уравнения остаются неуловимыми, как это верно для проблем в области науки о климате, финансов, эпидемиологии и нейробиологии. Даже в классических областях, таких как оптика и турбулентность, где существуют

управляющие уравнения, исследователи все чаще обращаются к анализу, основанному на данных. Многие важные проблемы, связанные с данными, такие как прогнозирование изменения климата, понимание познание на основе нейронных записей, прогнозирование и подавление распространения болезней или контроль турбулентности для энергоэффективного производства и транспортировки электроэнергии направлены на то, чтобы воспользоваться преимуществами прогресса в открытии динамики на основе данных. Кроме того, классические геометрические и статистические взгляды на динамические системы дополняются третьей теоретико-операторной перспективой, основанной на эволюции измерений системы. Эта так называемая теория операторов Купмана готова извлечь выгоду из растущей доступности данных измерений из сложных систем. Более того, теория Купмана предоставляет путь для определения внутренних систем координат для представления нелинейной динамики в линейной структуре. Получение линейных представлений сильно нелинейных систем может революционизировать нашу способность прогнозировать и управлять этими системами. В этой главе представлен современный взгляд на динамические системы в контексте текущих целей и открытых задач. Динамические системы, управляемые данными,-это быстро развивающаяся область, и поэтому мы фокусируемся на сочетании устоявшихся и новых методов, которые управляют текущие события. В частности, мы сосредоточимся на ключевых задачах обнаружения динамики на основе данных и поиска представлений, основанных на данных, которые делают нелинейные системы поддающимися линейному анализу.

Прежде чем обобщить последние достижения в динамических системах, управляемых данными, важно

сначала дать математическое введение в нотацию и обобщить ключевые мотивации

и открытые проблемы в динамических системах.

Динамические Системы

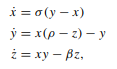
На протяжении всей этой главы мы будем рассматривать динамические системы вида:



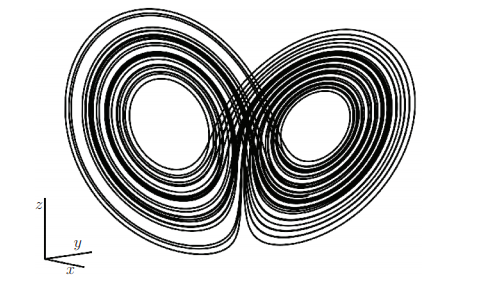
где x-состояние системы, а f-векторное поле, которое, возможно, зависит от состояния

x, времени t и набора параметров β.

Например, рассмотрим уравнения Лоренца [345]



с параметрами σ = 10,ρ = 28 и β = 8/3. Траектория системы Лоренца показана на рис. 7.1.



В этом случае вектор состояния равен x =xyz T и вектор параметров равенβ =σρβ T

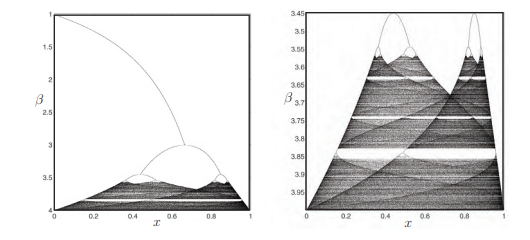
Система Лоренца относится к числу простейших и наиболее хорошо изученных динамических систем,проявляющих хаос, который характеризуется чувствительной зависимостью от начальных условий. Дветраектории с близкими начальными условиями будут быстро расходиться в поведении, и по прошествии длительноговремени могут быть сделаны только статистические утверждения.Легко моделировать динамические системы, такие как система Лоренца. Во - первых, векторное поле f(x,t;β) определяется в функции Лоренца:

Мы часто будем рассматривать более простой случай автономной системы без зависимости от времени или параметров:



В общем случае x(t) ∈ M-это n-мерное состояние, которое живет на гладком многообразии M, а

f-элемент касательного расслоения TM из M, так что f(x(t)) ∈ Tx(t)M. Однако мы, как правило, рассмотрим более простой случай, когда x-вектор, M = Rn, а f-непрерывная функция Липшица, гарантирующая существование и единственность решений (7.3).



Цели и задачи в современных динамических системах

Поскольку мы обычно используем динамические системы для моделирования явлений реального мира, существует ряд приоритетных целей, связанных с анализом динамических систем:

1. Прогнозирование будущего состояния. Во многих случаях, таких как метеорология и климатология, мы стремимся предсказать будущее состояние системы. Долгосрочные прогнозы все еще могут быть сложными.

2. Проектирование и оптимизация. Мы можем стремиться настроить параметры системы для

повышения производительности или стабильности, например, путем размещения ребер на

ракете.

3. Оценка и контроль. Часто возможно активно управлять динамической системой с

помощью обратной связи, используя измерения системы для информирования о приведении в действие для изменения

поведения. В этом случае часто бывает необходимо оценить полное состояние системы

по ограниченным измерениям.

4. Интерпретируемость и физическое понимание. Возможно, более фундаментальной целью

динамических систем является обеспечение физического понимания и интерпретируемости

поведения системы посредством анализа траекторий и решений управляющих уравнений

движения. Системы реального мира, как правило, нелинейны и демонстрируют многомасштабное поведение как в пространстве, так и во времени. Необходимо также предположить, что существует неопределенность в уравнениях движения, в спецификации параметров и в измерениях системы. Некоторые системы более чувствительны к этой неопределенности, чем другие, и вероятностные подходы должны быть. Все чаще случается также, что основные уравнения движения не определены, и их может быть трудно вывести из первых принципов.

В этой главе будут рассмотрены новейшие методы, основанные на данных, для идентификации и анализа динамических систем. Большая часть этой главы посвящена двум основным проблемам современных динамических систем:

1. Нелинейность. Нелинейность остается основной проблемой при анализе и управлении

динамическими системами, порождая сложную глобальную динамику. Выше мы видели, что линейные системы могут быть полностью охарактеризованы в терминах спектрального разложения (т. Е. собственных значений и собственных векторов) матрицы A, что приводит к общим процедурам для прогнозирования, оценки и контроля. Для нелинейных систем такой всеобъемлющей структуры не существует, и разработка этой общей структуры является грандиозной математической задачей 21 века. Ведущий взгляд на нелинейные динамические системы рассматривает геометрию подпространств локальных линеаризаций вокруг неподвижных точек и периодических орбит, глобальные гетероклинические и гомоклинические орбиты, соединяющие эти структуры, и более общие аттракторы [252]. Эта геометрическая теория, зародившаяся в Пуанкаре, трансформировалась то, как мы моделируем сложные системы, и его успех в значительной степени можно объяснить теоретическими результатами, такими как теорема Хартмана-Гробмана, которая устанавливает, когда и где можно аппроксимировать нелинейную систему с линейной динамикой. Таким образом, часто можно применить множество методов линейного анализа в небольшой окрестности фиксированной точки или периодической орбиты. Хотя геометрическая перспектива обеспечивает количественные локально линейные модели, глобальный анализ в значительной степени остался качественный и вычислительный, ограничивающий теорию нелинейного прогнозирования, оценки и управления вдали от неподвижных точек и периодических орбит.

2. Неизвестная динамика. Возможно, еще более серьезная проблема возникает из-за отсутствия

известных управляющих уравнений для многих современных систем, представляющих интерес. Все чаще исследователи обращаются к более сложным и реалистичным системам, таким как

нейробиология, эпидемиология и экология. В этих областях существует фундаментальное отсутствие известных физических законов, которые обеспечивают первые принципы, из которых можно вывести уравнения движения. Даже в системах, где мы знаем управляющие уравнения,

такие как турбулентность, свертывание белка и горение, мы изо всех сил пытаемся найти закономерности в этих многомерных системах, чтобы выявить внутренние координаты и крупнозернистые переменные, по которым развивается доминирующее поведение.

Традиционно физические системы анализировались путем создания идеальных приближений,

а затем получения простых моделей дифференциальных уравнений с помощью второго закона Ньютона. Драматические упрощения часто можно было бы сделать, используя симметрии и умные системы координат, о чем свидетельствует успех лагранжевой и гамильтоновой

динамики [2, 369]. Со все более сложными системами парадигма смещается от

этого классического подхода к методам, основанным на данных, для обнаружения управляющих уравнений.

Все модели являются приближениями, и с увеличением сложности эти приближения часто становятся подозрительными. Определение правильной модели становится все более

субъективным, и растет потребность в автоматизированных методах обнаружения моделей,

которые освещают лежащие в основе физические механизмы. Также часто существуют скрытые переменные

это имеет отношение к динамике, но может остаться неизмеренным. Раскрытие этих скрытых

эффектов является серьезной проблемой для методов, основанных на данных.

7.2 Декомпозиция динамического режима (DMD) 235

Идентификация неизвестной динамики по данным и изучение внутренних координат, которые позволяют

линейно представлять нелинейные системы, являются двумя наиболее актуальными задачами современных

динамических систем. Преодоление проблем неизвестной динамики и нелинейности

обещает изменить наше понимание сложных систем с огромной

потенциальной пользой практически для всех областей науки и техники.

В этой главе мы рассмотрим эти вопросы более подробно и опишем

ряд новых методов решения этих проблем. В частности, существует два

ключевых подхода, определяющих современные динамические системы, управляемые данными:

1. Теоретико-операторные представления. Для решения проблемы нелинейности все чаще используются операторно-теоретические подходы к динамическим системам. Как мы

покажем, нелинейные динамические системы можно представить в терминах бесконечномерных, но линейных операторов, таких как оператор Купмана из раздела 7.4, который

расширяет функции измерения и оператор Перрона-Фробениуса, который увеличивает плотности

вероятности и ансамбли в динамике.

2. Регрессия на основе данных и машинное обучение. Поскольку данных становится все

больше, и мы продолжаем исследовать системы, которые не поддаются анализу первых принципов, регрессия и машинное обучение становятся жизненно важными инструментами для

обнаружения динамических систем на основе данных. Это основа многих методов,

описанных в этой главе, включая декомпозицию динамического режима (DMD) в

Раздел 7.2, разреженная идентификация нелинейной динамики (SINDy) в разделе 7.3, методы

Купмана, основанные на данных, в разделе 7.5, а также использование генетического

программирования для идентификации динамики по данным [68, 477].

Важно отметить, что многие методы и перспективы, описанные в этой

главе, взаимосвязаны, и продолжение укрепления и раскрытия этих взаимосвязей является

предметом продолжающихся исследований. Также стоит упомянуть, что третьей серьезной проблемой

является многомерность, связанная со многими современными динамическими системами, такими как

встречается в динамике численности населения, моделировании мозга и высокоточных численных дискретизациях уравнений в частных производных. Многомерность подробно рассматривается в

последующих главах, посвященных моделям пониженного порядка (ПЗУ).